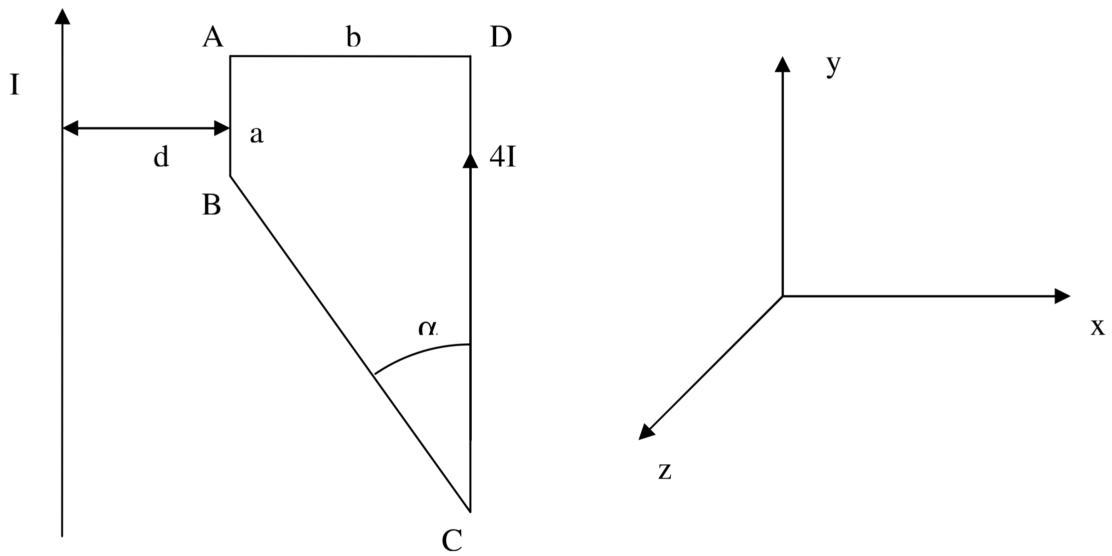
Corso di fisica II

Prova scritta del primo modulo del 29/01/08

Esercizio 1

Si ricorda che solo la componente di corrente parallela al filo contribuisce alla forza magnetica tra il filo e la spira. Vedremo che le altre componenti si annullano.
Cominciamo dalla geometria della spira:



I lati AB = a e DA = b sono dati. Il lato BC è il doppio del lato DA; il lato CD = AB + 2DA cos α (verifica con trigonometria).

Consideriamo il campo magnetico prodotto dal filo per poi calcolare la forza che ne deriva dall'interazione con la corrente nella spira (volendo si può scegliere di fare il contrario).
Il campo magnetico prodotto dal filo è

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{r}\hat{k}$$

Vediamo le forze agenti su ciascuno dei lati:

$$\vec{F}_{AB} = +\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{4I^2}{d}a\cdot\hat{\imath}$$

$$\vec{F}_{BC} = +\frac{\mu_0}{2\pi}4I^2\int_d^{d+b}\frac{1}{x}dx\cdot\left(\hat{\imath}\cos 30-\hat{\jmath}\right) = -\frac{\mu_0}{2\pi}4I^2\log\left(1+\frac{b}{d}\right)\cdot\left(\hat{\imath}\cos 30-\hat{\jmath}\right)$$

$$\vec{F}_{CD} = -\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{4I^2}{d+b}\left(a+2b\cos 30\right)\cdot\hat{\imath}$$

$$\vec{F}_{DA} = -\frac{\mu_0}{2\pi}4I^2\int_d^{d+b}\frac{1}{x}dx\cdot\hat{\jmath} = -\frac{\mu_0}{\pi}2I^2\log\left(1+\frac{b}{d}\right)\cdot\hat{\jmath}$$

$$\vec{F}_{TOT} = \sum_i\vec{F}_i = +\frac{\mu_0}{\pi}2I^2\left[\frac{a}{d}+\sqrt{3}\log\left(1+\frac{b}{d}\right)-\frac{a+b\sqrt{3}}{b+d}\right]\cdot\hat{\imath} = 1.2\cdot 10^{-8}\,N$$

Il momento magnetico:

$$m = IS = 4I\left(ab + \frac{b^2\sqrt{3}}{2}\right) = 3.7 \cdot 10^{-3}\,Am^2$$

Esercizio 2

Questo esercizio si risolve applicando il teorema di Gauss:

$$4\pi \cdot r^2 \varepsilon_0 E(r) = \int_0^r 4\pi x^2 dx \rho(x) = 4\pi\rho_0 \int_0^r dx \frac{(x^2 - R^2) + R^2}{r + R}$$

Per $r < R$

$$4\pi \cdot r^2 \varepsilon_0 E(r) = 4\pi\rho_0 \left[\frac{r^2}{2} - Rr + R^2 \log\left(1 + \frac{r}{R}\right)\right]$$

$$E(r) = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0}\left[\frac{1}{2} - \frac{R}{r} + \frac{R^2}{r^2}\log\left(1 + \frac{r}{R}\right)\right]$$

All'interno del conduttore il campo elettrico non può essere che nullo.

All'esterno è il campo di una sfera carica (con la carica data dall'integrale di volume della densità):

$$E(r) = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0}\frac{R^2}{r^2}\left[\log 2 - \frac{1}{2}\right]$$

Per trovare il potenziale elettrostatico del conduttore possiamo integrare dall'infinito alla sua superficie il campo elettrico esterno:

$$\varphi_{CONDUTTORE} = -\int_\infty^{2R} E(r)dr = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0}\frac{R}{2}\left[\log 2 - \frac{1}{2}\right] = 6.82V$$